**第2讲 一元一次方程及其解法**

**知识梳理**

**1．一元一次方程的定义**

只含有一个未知数且未知数的次数是一次的方程叫做**一元一次方程**.

一元一次方程必须同时满足下列三个条件：

(1)含有一个未知数；(2)未知数的指数是1；(3)未知数的系数不为0.

**2．解方程**

求方程的解的过程叫做解方程.

**3．等式的性质**

(1)等式的性质1：如果*a*=*b*，那么*a*±*c*=*b*±*c*.

(2)等式的性质2：如果*a*=*b*，那么*ac*=*bc*.如果*a*=*b*(*c*≠0)，那么

**4．解一元一次方程的步骤**

(1)去分母；(2)去括号；(3)移项；(4)化成*ax*=*b*(*a*≠0)的形式；(5)两边同时除以未知数的系数，得到方程的解.

**注意：**

(1)化分母中的小数为整数时，要根据分数的基本性质，把分子、分母同时乘以一个不为0的数，不改变分数的局部的值，不涉及其他项.

(2)去分母是根据等式的基本性质，因此方程中的每一项都要同时乘以分母的最小公倍数，不能漏乘，去掉分数线之后，分子要注意添加括号.

(3)这些步骤的先后顺序并不是严格固定的，要根据问题灵活变动.

**典型解析**

**【知识点一 一元一次方程的定义】**

**例1：**以下式子：(1)；(2)3+2=5；(3)；(4)；(5)2*x*=3*x*；(6)3-4*x*；(7)；(8)其中是一元一次方程的是(1)(5)(7)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**【变式训练】**

当*m*= -1或0 ；*n*= 1 时，方程是一元一次方程.

**【知识点二 解一元一次方程的一般方法】**

**例2：**解下列方程：

(1)； (2)；

(3).

答案：(1)；(2)；(3).

**例3：**解方程：(1)

[解析]两个方程中都含有字母，所以解两个方程时都要先去分母.由于(2)中的分母是小数，应先根据分数的基本性质把其化为整数后再去分母.

[答案](1)去分母，得(8*x*+4)-(5*x*-7)=10.

去括号，得8*x*+4-5*x*+7=10.

移项及合并同类项，得3*x*=-1.

系数化为1，得.

(2)原方程可变形为7.5.

去分母，得800-1100*x*-13=2-100*x*-15.

移项及合并同类项，得1000*x*=800.

系数化为1，得.

**【变式训练】**

依据下列解方程的过程，请在前面的横线上填写变形步骤，在后面的括号内填写变形依据，横线上填写注意事项.

解：原方程可化为. (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)

(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)，得3(3*x*+5)=2(2*x*-1).(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)注意：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

去括号，得9*x*+15=4*x*-2.(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，得9*x*-4*x*=-2-15.(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，得5*x*=-17.(代数式运算、合并同类项法则)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，得 (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)

所以， 是原方程的解.

分析：当分母中含有小数时，可以用分数的基本性质，把它们化为整数，再按照去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为1的步骤依次进行.

解：原方程可化为.(分数的基本性质)

(去分母)，得3(3*x*+5)=2(2*x*-1).(等式性质2)注意：不要漏乘

去括号，得9*x*+15=4*x*-2.(去括号法则，乘法分配律)

移项，得9*x*-4*x*=-2-15.(等式的性质1)

合并同类项法则，得5*x*=-17.(代数式运算、合并同类项法则)

系数化为1，得*x*=.(等式性质2)

**例4：**解方程：.

分析 百分数是特殊的分数，也可以用去分母的方法对方程进行变形

解 去分母，得.

去括号，得.

移项，得.

合并同类项，得.

未知数的系数化为1，得.

**例5：**(1)； (2).

解：(1)；(2).

**例6：**解方程：3{2*x*-1-[3(2*x*-1)-3]}=5.

规范解答

设*y*=2*x*-1.

则原方程可化为3[*y*-(3*y*-3)]=5.

整理得-6*y*=-4.

解得即

所以

解后反思

仔细观察，发现方程中含有未知数*x*的地方都有2*x*-1，遇到这种情况，我们可以先将2*x*-1看成一个整体，即利用换元法，设*y*=2*x*-1，求*y*=2*x*-1，求得*y*，再求*x*.

**【知识点三 用一元一次方程的解的定义解相关问题】**

**例7：**已知是方程6(2*x*+*m*)=3*m*+2的解，求关于*y*的方程*my*+2=*m*(1-2*y*)的解.

[解析]因为是方程6(2*x*+*m*)=3*m*+2的解，所以满足方程6(2*x*+*m*)=3*m*+2，代入后解关于*m*的方程，再将*m*代入方程*my*+2=*m*(1-2*y*)中，解关于*y*的方程.

[答案]将代入方程6(2*x*+*m*)=3*m*+2中，

得

6+6*m*=3*m*+2，

将代入方程*my*+2=*m*(1-2*y*)中，

得

-4*y*+6=-4(1-2*y*)，

-4*y*+6=-4+8*y*，

-12*y*=-10，

.

**拓展提升**

**一、含绝对值的一次方程**

**例8：解含有绝对值的方程：**

(1)； (2)； (3).

(1)分析：本题运用零点分段法求解，本题有两个零点，*x*=4和*x*=3

解：当

当

当

(2)解：5*x*-2=3，*x*=1

5*x*-2=-3，

(3)解：，*x*=-1

，*x*=2

**【方法提炼】**

零点分段法：

1、先令绝对值里的代数式为0，求出零点.

2、零点将数轴划分为几段.

3、讨论在每段区间内，绝对值是正是负，并去绝对值，得出最终结果.

**二、分类讨论思想**

分类讨论是方程中重要的思想方法.本章的分类讨论思想主要表现为以下两个方面：一是求方程的解，在对*ax*=*b*化简时，应根据*a*，*b*的取值讨论解的情况；二是解实际应用题时，需要对各种方案进行讨论，得出最佳方案.

**例9：**关于*x*的方程2*ax*+2=12*x*+3*b*，问：当*a*，*b*为何值时：

(1)方程有唯一解；(2)方程有无数个解；(3)方程无解.

[解析]解含字母系数的方程时，先将方程化为“*ax*=*b*”的形式，然后根据方程的解的情况进行分类讨论.

[答案]把方程2*ax*+2=12*x*+3*b*变形，得(2*a*-12)*x*=3*b*-2.

(1)当2*a*-12≠0，即*a*≠6时，方程只有一个解，其解为.

即*a*≠6，*b*为任意数时方程有唯一解.

(2)因为2*a*-12=0且3*b*-2=0时，方程有无数个解，

由2*a*-12=0，得*a*=6；

由3*b*-2=0，得.

即*a*=6且时方程有无数个解.

(3)因为2*a*-12=0且3*b*-2≠0时，方程无解，

由2*a*-12=0，得*a*=6；

由3*b*-2≠0，得

即*a*=6且时方程无解.

[规律总结]对于一元一次方程*ax*=*b*，(1)当*a*≠0时，方程有唯一解；(2)当*a*=0，*b*=0时，方程有无数个解；(3)当*a*=0，*b*≠0时，方程无解.反之，(1)当方程有唯一解时，*a*≠0；(2)当方程有无数个解时，*a*=0，*b*=0；(3)当方程无解时，*a*=0，*b*≠0.因此，我们只要把已知方程化为*ax*=*b*的形式，即可讨论*a*，*b*的取值范围.

**【变式训练】**

解关于*x*的方程.

解：(*a*-1)*x*=4

当*a*=1时，无解

当*a*≠1时，

**同步训练**

**一、填空题**

1．当\_\_\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_\_\_时，方程是一元一次方程.

答案：；3

2．由去括号得\_\_\_\_\_\_．

答案：

3．由，去分母，得\_\_\_\_\_\_．

答案：

4．当\_\_\_\_\_\_\_时，代数式与的值互为相反数.

答案：19.

5．是方程的解，那么=\_\_\_\_\_\_．

答案：

6．已知方程的解是，那么方程的解是\_\_\_\_\_\_\_.

答案：.

**二、选择题**

7．下列变形正确的是( ).

A.4*x*-5=3*x*+2变形得4*x*-3*x*=-2+5 变形得4*x*-1=3*x*+3

C.3(*x*-1)=2(*x*+3)变形得3*x*-1=2*x*+6 D.3*x*=2变形得

答案：D

8．下列解方程中正确的是( )．

(A)将去分母，得

(B)由，得

(C)去括号，得

(D)由，得

答案： C

**三、解答题**

9．解下列方程

(1)； (2).

解：(1)*x*=2；(2)

10．解下列方程：

(1)； (2)；

(3)； (4)；

(5)； (6).

答案：(1)；(2)；(3)；(4)；(5)；(6).

11．解下列方程：

(1)；

(2)；

(3).

解：(1)*x*=9；(2)；(3)*x*=1.2.

**拓展练习**

1．解下列方程

(1)|5*x*+6|=6*x*-5； (2)2|1-2|1-2*x*||+2*x*=1.

解：(1)由题意，得5*x*+6=6*x*-5或5*x*+6=-6*x*+5，

所以*x*=11或(此时6*x*-5<0，不合题意，舍去).

综上，原方程解为*x*=11.

(2)原方程可化为2|1-2|1-2*x*||=1-2*x*，可知1-2*x*≥0，即

可进一步去绝对值，得2|1-2(1-2*x*)|=1-2*x*，即2|4*x*-1|=1-2*x*，

当4*x*-1<0时，即时，方程化简为2(4*x*-1)=-1+2*x*，解得

当4*x*-1≥0时，即时，方程化简为2(4*x*-1)=1-2*x*，解得

综上，原方程的解为或

2．问当*a*、*b*满足什么条件时，方程2*x*+5-*a*=1-*bx*：

(1)有唯一解；(2)有无数解；(3)无解.

分析：先解关于*x*的方程，把*x*用*a*，*b*表示，最后再根据系数情况进行讨论.

解：将原方程移项得2*x*+*bx*=1+*a*-5，合并同类项得：(2+*b*)*x*=*a*-4

当2+*b*≠0，即*b*≠-2时，方程有唯一解

当2+*b*=0且*a*-4=0时，即*b*=-2且*a*=4时，方程有无数个解，

当2+*b*=0且*a*-4≠0时，即*b*=-2且*a*≠4时，方程无解.